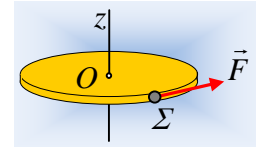


Η επιτάχυνση και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής.

Ένας οριζόντιος δίσκος μάζας $M=4m$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον κατακόρυφο άξονα z , ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του O . Στην περιφέρεια του δίσκου προσκολλάται ένα αμελητέων διαστάσεων μικρό σώμα Σ , μάζας m , δημιουργώντας έτσι το στερεό s .



Ασκούμε στο σώμα Σ μια σταθερού μέτρου οριζόντια δύναμη F , με αποτέλεσμα να προκαλέσουμε την περιστροφή του στερεού.

i) Το σώμα Σ θα αποκτήσει:

- α) σταθερού μέτρου επιτάχυνση.
- β) επιτάχυνση που θα αυξάνεται καθώς περνά ο χρόνος.

ii) Το σώμα Σ θα αποκτήσει επιτάχυνση στη διεύθυνση της δύναμης F , μέτρου:

$$\alpha) a = \frac{F}{m}, \quad \beta) a = \frac{F}{2m}, \quad \gamma) a = \frac{F}{3m}, \quad \delta) a = \frac{F}{4m}, \quad \epsilon) a = \frac{F}{5m}.$$

iii) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ , κατά (ως προς) τον άξονα z :

- α) είναι σταθερός, β) είναι ανάλογος του χρόνου.

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του δίσκου, κατά (ως προς) τον άξονα z , έχει μέτρο:

$$\alpha) \frac{dL}{dt} = \frac{1}{5}FR, \quad \beta) \frac{dL}{dt} = \frac{4}{5}FR, \quad \gamma) \frac{dL}{dt} = \frac{2}{3}FR, \quad \delta) \frac{dL}{dt} = FR$$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2}MR^2$.

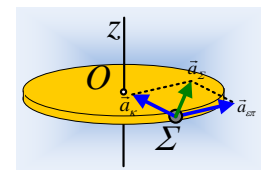
Απάντηση:

i) Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για το στερεό s , παίρνουμε:

$$\Sigma\tau = I_s \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot R = I_s \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (1)$$

Από την σχέση (1) προκύπτει ότι το στερεό s αποκτά σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Αλλά τότε το σώμα Σ , που θεωρούμε υλικό σημείο που εκτελεί κυκλική κίνηση, θα έχει:

- Μια επιτάχυνση στη διεύθυνση της εφαπτομένης, ονομάζεται **επιτρόχια** επιτάχυνση, μέτρου $a_{\epsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$, σταθερού μέτρου και
- Μια επιτάχυνση, υπεύθυνη για την αλλαγή της κατεύθυνσης της ταχύτητάς του, την **κεντρομόλο** επιτάχυνση, μέτρου $a_{\kappa} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$.



Αλλά καθώς επιταχύνεται το στερεό, η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται, συνεπώς αυξάνεται και η κεντρομόλος επιτάχυνση, οπότε αυξάνεται συνολικά η επιτάχυνση \vec{a}_{Σ} του σώματος Σ .

ii) Από την εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$F \cdot R = I_S \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot R = \left(\frac{1}{2} MR^2 + mR^2 \right) \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot R = 3mR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{F}{3mR} \quad (2)$$

$$a_{\varepsilon\pi} = a_{\gamma\omega\nu} R = \frac{F}{3m}$$

Σωστό το γ).

- iii) Η στροφορμή του σώματος Σ, είναι ένα διάνυσμα πάνω στον άξονα z με μέτρο $L_S = m\nu R$. Αλλά τότε ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του, κατά τον άξονα z, έχει μέτρο:

$$\frac{dL_S}{dt} = \frac{d(m\nu R)}{dt} = m \frac{d\nu}{dt} R = m a_{\varepsilon\pi} R = m \frac{F}{3m} R = \frac{1}{3} FR$$

Και κατεύθυνση του άξονα, με φορά προς τα πάνω.

Συνεπώς ο ρυθμός αυτός είναι σταθερός. Σωστό το α).

- iv) Η αντίστοιχη στροφορμή του δίσκου, έχει επίσης την διεύθυνση του άξονα με μέτρο:

$$L_\delta = I_\delta \omega$$

Και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, έχει τη διεύθυνση του άξονα με μέτρο:

$$\frac{dL_\delta}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) a_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2} 4mR^2 \frac{F}{3mR} \rightarrow$$

$$\frac{dL_\delta}{dt} = \frac{2}{3} FR$$

Σωστό το γ).

Σχόλιο.

Από το γενικευμένο νόμο για την στροφορμική κίνηση του στερεού s έχουμε:

$$\frac{dL_s}{dt} = \Sigma \tau_o = F \cdot R$$

Έτσι με το άθροισμα των δύο ρυθμών που υπολογίσαμε παραπάνω, για το σώμα Σ και το δίσκο.

dmargaris@gmail.com

