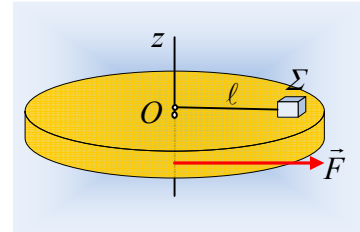


Μεγαλύτερες περιπέτειες...

Μετά την ανάρτηση «[Ένα σύστημα σωμάτων σε περιπέτειες...](#)» ας πάμε ένα βήμα παρακάτω, στη μελέτη του συστήματος σωμάτων και της εφαρμογής του γενικευμένου νόμου του Νεύτωνα.

Μια οριζόντια κυκλική πλατφόρμα μάζας $M=20\text{kg}$ και ακτίνας $R=1\text{m}$, μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα z , χωρίς τριβές, ο οποίος περνά από το κέντρο της O . Πάνω στην πλατφόρμα ηρεμεί ένα σώμα Σ μάζας $m=2\text{kg}$, δεμένο στο άκρο νήματος μήκους $\ell = 0,8\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου μέσω ενός δακτυλίου δένεται στον άξονα z , έτσι ώστε το σώμα Σ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς να τυλίγεται το νήμα στον άξονα. Σε μια στιγμή ($t_0=0$) ασκείται στην περιφέρεια της πλατφόρμας, εφαπτομενικά, μια οριζόντια σταθερού μέτρου δύναμη $F=21,6\text{N}$, με αποτέλεσμα τη στιγμή $t_1=5\text{s}$ η πλατφόρμα να έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=10\text{rad/s}$.



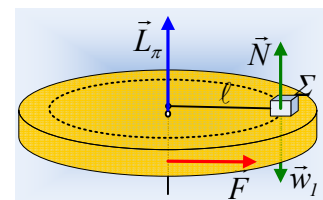
- i) Να εξετάσετε αν υπάρχει τριβή μεταξύ σώματος Σ και πλατφόρμας, με αποτέλεσμα να τεθεί σε περιστροφή και το σώμα Σ .
- ii) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής κατά (ως προς) τον άξονα z :
 - α) του συστήματος β) της πλατφόρμας και γ) του σώματος Σ .
 στο χρονικό διάστημα $0-5\text{s}$.
- iii) Να υπολογιστεί τη χρονική στιγμή t_1 η στροφορμής κατά (ως προς) τον άξονα z :
 - α) του συστήματος β) της πλατφόρμας και γ) του σώματος Σ .
- iv) Τη στιγμή t_1 η δύναμη F καταργείται, οπότε μετά από λίγο παρατηρούμε ότι το σώμα Σ δεν γλιστράει πάνω στην πλατφόρμα. Να υπολογιστεί τότε η ταχύτητα του σώματος Σ . Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας, ως προς τον άξονά της $I = \frac{1}{2} MR^2$.

Απάντηση:

- i) Η στροφορμή της πλατφόρμας τη στιγμή t_1 έχει μέτρο:

$$L_\pi = I\omega = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \omega \rightarrow$$

$$L_\pi = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 1^2 \cdot 10 \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s} = 100 \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}$$



Έστω τώρα ότι δεν εμφανίζεται τριβή μεταξύ σώματος Σ και πλατφόρμας. Τότε στο σώμα Σ ασκείται το βάρος και η αντίδραση της πλατφόρμας N , η συνισταμένη των οποίων είναι μηδέν και το σώμα παραμένει ακίνητο.

Για την πλατφόρμα έχουμε:

$$\frac{dL_{\pi}}{dt} = \Sigma \tau \rightarrow \frac{dL_{\pi}}{dt} = \tau_w + \tau_{F_{a\acute{\epsilon}}} + \tau_{N'} + \tau_F$$

Όπου οι ροπές, του βάρους, της δύναμης από τον άξονα και της αντίδρασης της Ν που ασκείται στο σώμα Σ είναι μηδενικές, άρα:

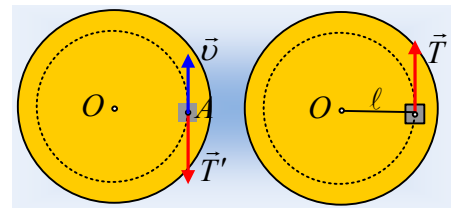
$$\frac{dL_{\pi}}{dt} = \tau_F = FR \rightarrow \frac{\Delta L_{\pi}}{\Delta t} = FR \rightarrow \frac{L_{\pi} - 0}{t_1 - 0} = FR \rightarrow$$

$$L_{\pi} = FRt_1 = 21,6 \cdot 1 \cdot 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s} = 108 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}$$

Πράγμα **άτοπο**, οπότε πρέπει στην πλατφόρμα να ασκείται και κάποια άλλη δύναμη, η ροπή της οποίας να μειώσει τη στροφορμή από την τιμή 108kg·m²/s στην τιμή 100kg·m²/s. Η δύναμη αυτή είναι τριβή που ασκείται στην πλατφόρμα από το σώμα Σ. Αλλά τότε και στο σώμα Σ ασκήθηκε δύναμη τριβής, η οποία θα το επιταχύνει με αποτέλεσμα να αρχίσει να στρέφεται γύρω από τον άξονα.

Γιατί; Ας δούμε το παραπάνω σχήμα σε κάτοψη.

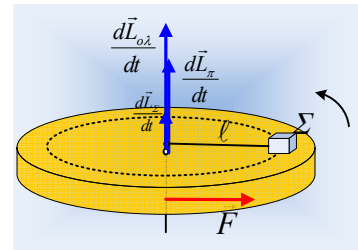
Έστω ότι το σώμα Σ βρίσκεται στο σημείο Α της πλατφόρμας. Όταν αυτή επιταχυνθεί, το σημείο Α αποκτά ταχύτητα $v_{\pi} = \omega r$ με αποτέλεσμα να ασκηθεί στην πλατφόρμα, από το σώμα Σ, δύναμη



τριβής Τ' αντίθετης φοράς από την ταχύτητα. Αλλά τότε η αντίδρασή της Τ, ασκείται στο σώμα Σ και το επιταχύνει. Προσέξτε ότι η τριβή είναι εφαπτόμενη στον κύκλο ακτίνας $r = \ell$.

- ii) Οι δυνάμεις τριβής που ασκούνται σε πλατφόρμα-σώμα Σ, είναι εσωτερικές δυνάμεις για το σύστημα, οπότε ο γενικευμένος νόμος του Νεύτωνα για το σύστημα δίνει:

$$\frac{dL_{o\lambda}}{dt} = \Sigma \tau_{e\acute{\epsilon}} \rightarrow$$



Αλλά η δύναμη του άξονα και τα βάρη δεν έχουν ροπή ως προς τον άξονα, οπότε παίρνουμε:

$$\frac{dL_{o\lambda}}{dt} = \tau_F = FR = 21,6 \cdot 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2 = 21,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$$

Στην πλατφόρμα ασκούνται οι ροπές της δύναμης F και της τριβής Τ'. Είτε η τριβή αυτή είναι στατική, είτε ολίσθησης, στο χρονικό διάστημα 0-5s, έχει σταθερό μέτρο και συνεπώς σταθερή ροπή, οπότε ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της παραμένει σταθερός και ισχύει:

$$\frac{dL_{\pi}}{dt} = \Sigma \tau = \sigma \tau \alpha \theta \rightarrow \frac{dL_{\pi}}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L_1 - 0}{t_1 - 0} = \frac{100}{5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2 = 20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2.$$

Αλλά: $\frac{d\vec{L}_{o\lambda}}{dt} = \frac{d\vec{L}_{\pi}}{dt} + \frac{d\vec{L}_{\Sigma}}{dt} \rightarrow$

$$\frac{dL_{\Sigma}}{dt} = \frac{dL_{o\lambda}}{dt} - \frac{dL_{\pi}}{dt} = 21,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2 - 20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2 = 1,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$$

Οι παραπάνω ρυθμοί είναι διανύσματα πάνω στον άξονα z και φορά προς τα πάνω, όπως έχουν σχεδιαστεί στο παραπάνω σχήμα.

- iii) Στο i) ερώτημα υπολογίσαμε τη στιγμή t_1 τη στροφορμή της πλατφόρμας $L_{\pi} = 100 \text{ kgm}^2/\text{s}$. Για το σύστημα έχουμε:

$$\frac{dL_{o\lambda}}{dt} = FR \rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = FR \rightarrow L_{o\lambda} = FRt_1$$

$$L_{o\lambda} = 21,6 \cdot 1 \cdot 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2 = 108 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}.$$

$$\text{Όμως } \vec{L}_{o\lambda} = \vec{L}_{\pi} + \vec{L}_{\Sigma} \rightarrow$$

$$L_{\Sigma} = L_{o\lambda} - L_{\pi} = 108 \text{ kgm}^2/\text{s} - 100 \text{ kgm}^2/\text{s} = 8 \text{ kgm}^2/\text{s}.$$

Με κατευθύνσεις, όπως στο σχήμα.

- iv) Μόλις πάψει να ασκείται η δύναμη F, οι μόνες δυνάμεις που παρουσιάζουν ροπή ως προς τον άξονα είναι οι δυνάμεις τριβής. Εξαιτίας της τριβής το σώμα Σ επιταχύνεται ενώ η πλατφόρμα επιβραδύνεται. Μόλις λοιπόν η ταχύτητα του σώματος Σ πάρει τιμή ίση με τη γραμμική ταχύτητα ενός σημείου της πλατφόρμας που απέχει κατά $r = \ell$ από το κέντρο O, θα πάψει η άσκηση της τριβής και το σύστημα θα περιστρέφεται σαν ένα σώμα με μια γωνιακή ταχύτητα ω_{κ} . Αλλά οι δυνάμεις τριβής είναι εσωτερικές για το σύστημα, οπότε η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_{\text{τελ}} \rightarrow L_{o\lambda} = \left(\frac{1}{2} MR^2 + m\ell^2 \right) \omega_{\kappa} \rightarrow$$

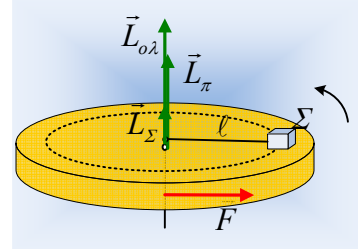
$$\omega_{\kappa} = \frac{L_{o\lambda}}{\frac{1}{2} MR^2 + m\ell^2} = \frac{108}{\frac{1}{2} 20 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0,8^2} \text{ rad} / \text{s} = 9,57 \text{ rad} / \text{s}$$

Οπότε το σώμα Σ έχει ταχύτητα:

$$v_{\Sigma} = \omega_{\kappa} \ell = 9,57 \cdot 0,8 \text{ m} / \text{s} \approx 7,66 \text{ m} / \text{s}$$

Σχόλια:

- 1) Η παραπάνω τριβή θα μπορούσε να ήταν στατική και να μην υπήρχε ολίσθηση του Σ πάνω στην πλατφόρμα. Αν συνέβαινε αυτό, τότε στο τελευταίο ερώτημα θα βρίσκαμε $\omega_{\kappa} = 10 \text{ rad/s}$, ίση δηλαδή με τη γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας τη στιγμή t_1 .
- 2) Με βάση τα ευρήματα του i) ερωτήματος, είναι φανερό ότι μέσω της ροπής της δύναμης F στο σύστημα «μεταφέρεται» στροφορμή $108 \text{ kgm}^2/\text{s}$, ενώ η πλατφόρμα «κρατά» τα $100 \text{ kgm}^2/\text{s}$, συνεπώς τα υπόλοιπα $8 \text{ kgm}^2/\text{s}$ είναι η στροφορμή του Σ. Η οποία όμως δίνεται από την σχέση:



$$L_{\Sigma} = m v \ell \rightarrow v = \frac{L_{\Sigma}}{m \ell} = \frac{8}{2 \cdot 0,8} m/s = 5 m/s$$

Ενώ ένα σημείο της πλατφόρμας που απέχει κατά 0,8m από το κέντρο O, έχει γραμμική ταχύτητα $v_{\gamma\rho} = \omega \cdot \ell = 10 \cdot 0,8 m/s = 8 m/s$.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ολίσθηση και η ασκούμενη τριβή είναι τριβή ολίσθησης.

- 3) Θα μπορούσαμε και να υπολογίσουμε τη τριβή, δουλεύοντας είτε με την πλατφόρμα, είτε με το Σ. Ας το κάνουμε με το σώμα Σ, εφαρμόζοντας το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau \rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = T \ell \rightarrow$$

$$T \ell = \frac{m v \ell - 0}{t_1 - 0} \rightarrow T = \frac{m v}{t_1} = \frac{2 \cdot 5}{5} N = 2 N$$

Βέβαια θα μπορούσαμε να δουλέψουμε και με την επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση και την επιτόρξια επιτάχυνση που αποκτά λόγω τριβής:

$$T = m a_{\epsilon\pi} \quad \text{ενώ} \quad v = a_{\epsilon\pi} \cdot t_1$$

Οπότε και πάλι $T = \frac{m v}{t_1}$.

- 4) **Σχόλιο για καθηγητές:** αν όλα τα παραπάνω σας θυμίζουν το θεώρημα ώθησης ορμής, για την κίνηση υλικού σημείου, η σύμπτωση ...δεν είναι καθόλου τυχαία!

dmargaris@gmail.com

