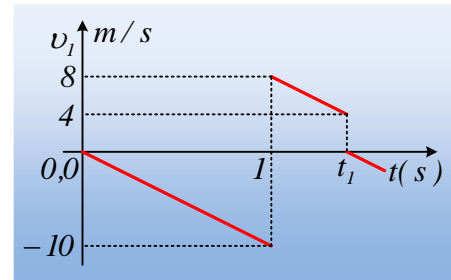


### Μελέτη δύο κρούσεων, από ένα διάγραμμα.

Μια σφαίρα Α μάζας  $m_1=0,4\text{kg}$ , αφήνεται από κάποιο ύψος  $h$  να πέσει ελεύθερα. Μετά την κρούση με το έδαφος, ανακλάται ενώ τη στιγμή  $t_1$  συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη σφαίρα Β μάζας  $m_2=0,2\text{kg}$ . Στο διάγραμμα δίνεται η ταχύτητα της Α σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο, όπου η διάρκεια των κρούσεων είναι αμελητέα.



- Να υπολογιστεί το αρχικό ύψος  $h$  από το οποίο αφέθηκε η Α σφαίρα να κινηθεί, καθώς και το ύψος από το έδαφος που έγινε η κρούση των δύο σφαιρών.
- Η κρούση της Α σφαίρας με το έδαφος είναι ή όχι ελαστική; Αν όχι, να υπολογίσετε την απώλεια της μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση.
- Να βρεθούν οι ταχύτητες της Β σφαίρας, ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά, την κρούση των δύο σφαιρών.
- Να υπολογιστεί, για κάθε κρούση, η μεταβολή της ορμής της Α σφαίρας.

Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .

#### Απάντηση:

- Με βάση το διάγραμμα της ταχύτητας, μόλις αφεθεί η σφαίρα να πέσει, αποκτά αρνητική ταχύτητα, πράγμα που σημαίνει ότι έχει ληφθεί η προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική. Αλλά για την ελεύθερη πτώση της σφαίρας, θεωρώντας την αρχική θέση ως αρχή του άξονα,  $y=0$ , έχουμε:

$$v=-gt \quad \text{και} \quad \Delta y = \frac{1}{2} at^2 \rightarrow y = -\frac{1}{2} gt^2$$

Τη στιγμή που η μπάλα φτάνει στο έδαφος ( $t=1\text{s}$ ),  $y=-h$ , οπότε:

$$-h = -\frac{1}{2} gt^2 \rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1\text{m} = 5\text{m}.$$

Μετά την κρούση με το έδαφος, η μπάλα έχει ταχύτητα (αρχική)  $v_{01}=8\text{m/s}$  και για την κίνησή της ισχύουν οι εξισώσεις:

$$v = v_{01} - g \cdot \Delta t \quad \text{και} \quad \Delta y = v_{01} \cdot \Delta t - \frac{1}{2} g \cdot (\Delta t)^2 \quad \text{ή}$$

$$v = v_{01} - g \cdot (t-1) \quad (1) \quad \text{και} \quad y = -h + v_{01} \cdot (t-1) - \frac{1}{2} g \cdot (t-1)^2 \quad (2)$$

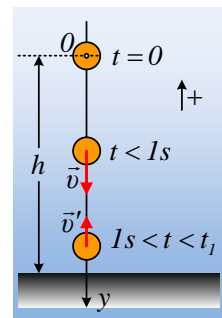
Από την (1) παίρνουμε για  $v_1 = 4\text{m/s}$ :

$$\Delta t = \frac{v_{01} - v_1}{g} = \frac{8 - 4}{10} \text{s} = 0,4\text{s} \rightarrow t_1 = 1,4\text{s}$$

Και με αντικατάσταση στην (2) βρίσκουμε:

$$y = -5\text{m} + 8 \cdot (1,4 - 1)\text{m} - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (1,4 - 1)^2 \text{m} = -2,6\text{m}$$

Συνεπώς η κρούση των δύο σφαιρών συνέβη σε ύψος  $h_1 = 5\text{m} - 2,6\text{m} = 2,4\text{m}$  από το έδαφος.



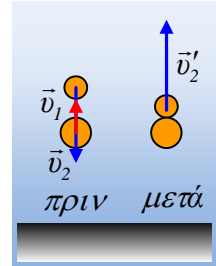
- ii) Η κρούση με το έδαφος είναι ανελαστική, αφού η μπάλα ανακλάται με μικρότερη ταχύτητα, από την ταχύτητα πριν την κρούση. Συνεπώς υπάρχει απώλεια κινητικής ενέργειας:

$$\Delta K = K_{αρ} - K_{τελ} = \frac{1}{2} m_1 v_{αρ}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{τελ}^2 = \frac{1}{2} 0,4 (10^2 - 8^2) J = 7,2 J$$

- iii) Η ταχύτητα της πρώτης σφαίρας με την δεύτερη, έχει ως αποτέλεσμα τον στιγμιαίο μηδενισμό της ταχύτητάς της, με βάση το διάγραμμα. Αλλά αυτό μπορεί να συμβεί, αν η Β σφαίρα κινείται με ταχύτητα  $v_2$  προς τα κάτω, όπως στο σχήμα.

Για τις ταχύτητες των σφαιρών μετά την κεντρική και ελαστική κρούση έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad \text{και} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$



Από την πρώτη αντικαθιστώντας  $v_1' = 0$ , παίρνουμε:

$$0 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \rightarrow v_2 = -\frac{m_1 - m_2}{2m_2} v_1 = -\frac{0,4 - 0,2}{2 \cdot 0,2} 4 m/s = -2 m/s$$

Οπότε με αντικατάσταση στην δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε:

$$v_2' = \frac{2 \cdot 0,4}{0,4 + 0,2} 4 m/s + \frac{0,2 - 0,4}{0,4 + 0,2} (-2 m/s) = 6 m/s$$

- iv) Για την κρούση με το έδαφος, η μεταβολή της ορμής της Α σφαίρας είναι:

$$\Delta \vec{P}_I = \vec{P}_{τελ} - \vec{P}_{αρχ} \rightarrow$$

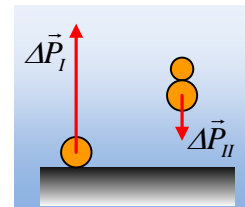
$$\Delta P_I = P_{τελ} - P_{αρχ} = m_1 v_{μετ} - m_1 v_{πρ} = 0,4 \cdot 8 kgm/s - 0,4(-10) kgm/s = +7,2 kgm/s$$

Ενώ για την κρούσης της με τη Β σφαίρα:

$$\Delta \vec{P}_{II} = \vec{P}_{τελ} - \vec{P}_{αρχ} \rightarrow$$

$$\Delta P_{II} = P_{τελ} - P_{αρχ} = m_1 v_{πρ} - m_1 v_{μετ} = 0 - 0,4 \cdot 4 kgm/s = -1,6 kgm/s$$

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα δύο διανύσματα μεταβολής της ορμής στις κρούσεις της Α σφαίρας.



[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)