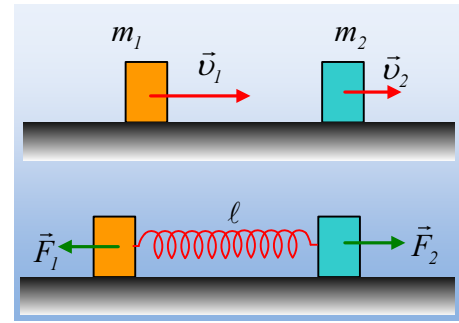


**Οι μετατοπίσεις σε μια ελαστική κρούση.**

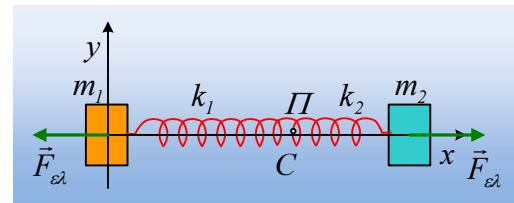
Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση δύο σώματα με μάζες  $m_1=2\text{kg}$ ,  $m_2=3\text{kg}$  και ταχύτητες  $v_1=10\text{m/s}$  και  $v_2=5\text{m/s}$ . Σε μια στιγμή συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά. Θεωρούμε ότι η ελαστική αυτή κρούση, προσομοιάζεται με την αλληλεπίδραση των δύο σωμάτων, μέσω ενός ελατηρίου, σταθεράς  $k=3.000\text{N/m}$  και φυσικού μήκους  $l_0=1\text{m}$ , όπου το ελατήριο αυτό είναι προσαρμοσμένο στο πίσω μέρος του σώματος  $m_2$ , πάνω στο άλλο άκρο του οποίου προσπίπτει το σώμα  $m_1$ .



Να αποδειχθεί ότι οι μετατοπίσεις κατά η διάρκεια της κρούσης των δύο σωμάτων, είναι ίσες.

**Απάντηση:**

Στη διάρκεια της κίνησης, ας πάρουμε έναν παρατηρητή Π, που «κάθεται» στο κέντρο μάζας C. Προφανώς πρόκειται για έναν αδρανειακό παρατηρητή, ο οποίος κινείται με σταθερή ταχύτητα:



$$V_C = V_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 10 + 3 \cdot 5}{2 + 3} \text{ m/s} = 7 \text{ m/s}$$

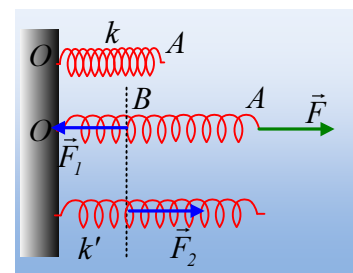
Τι βλέπει ο παρατηρητής Π τη στιγμή που αρχίζει η κρούση; Βλέπει τα δυο σώματα με ταχύτητες:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{V}_C \quad \text{και} \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{V}_C \quad \text{ή}$$

$$v'_1 = v_1 - V_C = 10 \text{ m/s} - 7 \text{ m/s} = 3 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad v'_2 = v_2 - V_C = 5 \text{ m/s} - 7 \text{ m/s} = -2 \text{ m/s}$$

Ενώ αμέσως μετά, τα σώματα δέχονται δύναμη από το ελατήριο μέτρου  $F_{ελ}=k \cdot \Delta l$ , όπως στο παραπάνω σχήμα.

Ας κάνουμε μια παρένθεση. Έστω ένα ελατήριο με φυσικό μήκος  $l_0$  το οποίο με την επίδραση μιας δύναμης  $F$ , επιμηκύνεται κατά  $\Delta l$ , όπου  $F=k \cdot \Delta l$ . Το τμήμα AB ισορροπεί, συνεπώς δέχεται δύναμη  $F_1$ , ίδιου μέτρου, από το τμήμα OB, όπως στο σχήμα. Βέβαια και το τμήμα OB, με αρχικό μήκος  $l'$  επιμηκύνεται κατά  $\Delta l'$  με την επίδραση της δύναμης  $F_2$ , της αντίδρασης  $F_1$ .



Αλλά αφού η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι ομοιόμορφη, θα ισχύει:

$$\Delta l' = \frac{l'}{l_0} \Delta l$$

Αλλά τότε το τμήμα OB έχει μια σταθερά  $k'$  για την οποία ισχύει:

$$F_2 = F_1 = F \quad \text{ή} \quad k' \cdot \Delta l' = k \cdot \Delta l \rightarrow$$

$$k' = k \cdot \frac{\Delta l}{\Delta l'} = k \cdot \frac{l_0}{l'}$$

Αλλά τότε ο παρατηρητής Π, ο οποίος βρίσκεται στη θέση:

$$x_C = x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 1}{2 + 3} m = 0,6 m$$

βλέπει το σώμα  $m_1$  να δέχεται δύναμη  $F_{ελ}$  από το τμήμα του ελατηρίου στα αριστερά του μήκους 0,6m, στα-

θεράς  $k_1 = k \cdot \frac{\ell_0}{\ell'} = 3.000 \frac{1}{0,6} = 5.000 N/m$  και παίρνοντας το 2<sup>ο</sup> νόμο γράφει:

$$\Sigma F_1 = m_1 \cdot a_1 \rightarrow -k_1 x_1 = m_1 \cdot a_1$$

Πράγμα που σημαίνει ότι το πρώτο σώμα εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά  $D_1 = k_1 = 5.000 N/m$ . Έτσι:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{5.000}{2}} = 50 rad/s$$

Ενώ το σώμα ξεκινά από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα  $v_1'$ , συνεπώς αυτή είναι η μέγιστη ταχύτητα, οπότε:

$$v_1' = A_1 \omega_1 \rightarrow A_1 = \frac{v_1'}{\omega_1} = \frac{3}{50} m = 0,06 m.$$

Αντίστοιχα το δεύτερο σώμα, θα εκτελέσει ΑΑΤ, γύρω από την «αρχική» του θέση, τη θέση του τη στιγμή

που αρχίζει η κρούση, με σταθερά  $k_2 = k \cdot \frac{\ell_0}{\ell_2} = 3.000 \frac{1}{0,4} = 7.500 N/m$ , με κυκλική συχνότητα:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{7.500}{3}} = 50 rad/s = \omega_1$$

Και με πλάτος:

$$v_2' = A_2 \omega_2 \rightarrow A_2 = \frac{v_2'}{\omega_2} = \frac{2}{50} m = 0,04 m$$

Ποιες είναι οι εξισώσεις κίνησης κάθε σώματος;

Για το σώμα  $m_1$  και θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, ενώ η αρχική του θέση  $x_0=0$ , έχουμε:

$$x_1' = A_1 \cdot \eta\mu(\omega_1 t) \rightarrow x_1' = 0,06 \cdot \eta\mu(50t) \quad (S.I.)$$

Αντίστοιχα το δεύτερο ταλαντώνεται γύρω από τη θέση  $x_{02}=1m$  με αρνητική αρχική ταχύτητα, οπότε:

$$x_2' = x_{02} + A_2 \cdot \eta\mu(\omega_2 t + \pi) \rightarrow x_2' = 1 + 0,04 \cdot \eta\mu(50t + \pi) \quad (S.I.)$$

Συνεπώς η κρούση, για τον παρατηρητή Π, διαρκεί, μέχρι τη στιγμή που κάθε «ελατήριο» θα αποκτήσει ξα-

νά το φυσικό του μήκος, σε χρόνο  $t = \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{50} s$  (διάρκεια της κρούσης) και που τα σώματα θα

έχουν επίσης ταχύτητες μέγιστου μέτρου, με τιμές  $v_1'' = -3 m/s$  και  $v_2'' = +2 m/s$ .

Πόση είναι η μετατόπιση κάθε σώματος; Προφανώς μηδενική (π.χ. το  $m_1$  διανύει διάστημα  $s = 2A_1 = 0,12 m$  επανερχόμενο στην αρχική του θέση, οπότε  $\Delta x_1 = 0$  και αντίστοιχα μηδενικά είναι και τα έργα των ασκούμενων δυνάμεων  $W_{F_1} = U_{αρχ} - U_{τελ} = 0$ ).

Τι βλέπει ο ακίνητος παρατηρητής;

Τα σώματα βρίσκονται κάθε στιγμή στις θέσεις:

$$x_1 = x_1' + v_C \cdot t = 7t + 0,06 \cdot \eta\mu(50t) \quad (S.I.)$$

$$x_2 = x_2' + v_C \cdot t = 7t + 1 - 0,04 \cdot \eta\mu(50t\pi) \quad (S.I.)$$

Αλλά τότε τη στιγμή που ολοκληρώνεται η κρούση  $t = \frac{\pi}{50}$  s τα σώματα βρίσκονται στις θέσεις:

$$x_1 = \frac{7\pi}{50} m \quad \text{και} \quad x_2 = 1 + \frac{7\pi}{50} m$$

Έχοντας μετατοπισθεί κατά:

$$\Delta x_1 = \frac{7\pi}{50} m - 0 = \frac{7\pi}{50} m \quad \text{και} \quad \Delta x_2 = 1 + \frac{7\pi}{50} m - 1 = \frac{7\pi}{50} m$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι οι μετατοπίσεις των δύο σωμάτων είναι ίσες.

### Παράρτημα:

Ας δούμε τι κάνει συνολικά το σύστημα, από μια άλλη πλευρά:

Στο διπλανό σχήμα έχουμε πάρει τα δυο σώματα, σε μια τυχαία θέση κατά τη διάρκεια της κρούσης, να απέχουν κατά  $x_1$  και  $x_2$  από το σημείο O, τη θέση του σώματος  $m_1$  τη στιγμή που «αρχίζει η κρούση». Προφανώς:

$$x_2 - x_1 = \ell = \ell_0 - \Delta\ell = \ell_0 - x.$$

όπου  $x$  η συσπίρωση του ελατηρίου.

Εφαρμόζουμε για κάθε σώμα το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα και παίρνουμε:

$$-kx = m_1 \cdot a_1 \quad (1)$$

$$+kx = m_2 \cdot a_2 \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με  $m_2$  και την (2) με  $m_1$  και με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

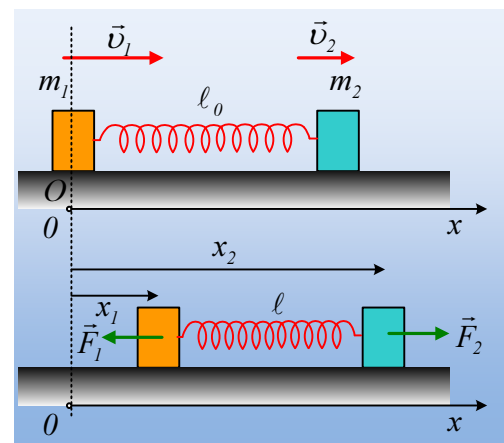
$$-k(m_1 + m_2)x = m_1 m_2 (a_1 - a_2) \quad \text{ή}$$

$$m_1 m_2 \left( \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) + (m_1 + m_2) kx = 0$$

$$\text{Αλλά } x_2 - x_1 = \ell_0 - x \rightarrow \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} = -\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \rightarrow$$

$$m_1 m_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + (m_1 + m_2) kx = 0 \quad \text{ή}$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$



Θέτοντας τώρα  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ , όπου  $\mu$  η **ανηγμένη μάζα** του συστήματος παίρνουμε:

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση, είναι της ίδιας μορφής με τη γνωστή μας εξίσωση που περιγράφει την ΑΑΤ, οπότε κατά αναλογία θα έχουμε:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0)$$

όπου  $A$  η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, που στην περίπτωση μας είναι η συσπείρωση τη στιγμή που τα σώματα έχουν ίσες ταχύτητες:

Αλλά από την Α.Δ.Ο. παίρνουμε:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \rightarrow$$

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 10 + 3 \cdot 5}{2 + 3} \text{ m/s} = 7 \text{ m/s}$$

ενώ από ΑΔΜΕ:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \frac{1}{2} k (\Delta \ell_{\max})^2 \rightarrow \Delta \ell = 0,1 \text{ m}$$

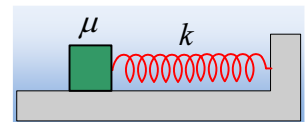
$$\text{Και } \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{3.000 \cdot 5}{6}} \text{ rad/s} = 50 \text{ rad/s}$$

Ενώ για  $t=0$ ,  $x=0$ , οπότε  $\phi_0=0$  και η εξίσωση γίνεται:

$$x = 0,1 \cdot \eta\mu(50t) \quad (\text{S.I.})$$

Παρατηρούμε δηλαδή το ελατήριο να συσπειρώνεται και να αποσυμπιέζεται αρμονικά με το χρόνο, όπως θα το έκανε, αν το ένα του άκρο ήταν σταθερό και στο άλλο του άκρο υπήρχε υποθετικό σώμα, με μάζα ίση με την **ανηγμένη μάζα** του συστήματος:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 1,2 \text{ kg}$$



Αξίζει να τονισθεί ότι  $0,1 \text{ m}$  είναι συνολικά η μεταβολή μήκους του ελατηρίου, ίση με το άθροισμα  $A_1 + A_2$  που βρήκαμε αρχικά, ενώ η κυκλική συχνότητα  $\omega$  μεταβολής του μήκους του, είναι ίδια με αυτές που υπολογίσαμε για κάθε σώμα χωριστά, όπως το βλέπει ο κινούμενος παρατηρητής...

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)