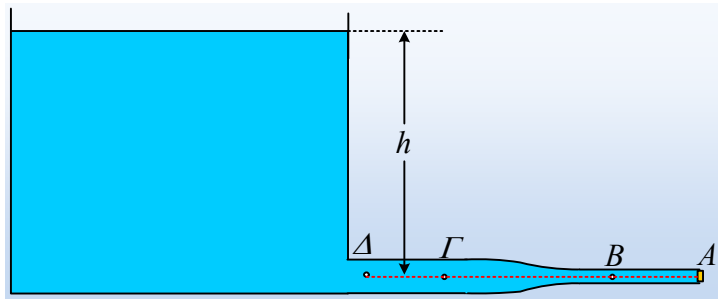


Οι πιέσεις και μια μόνιμη ροή.



Κοντά στον πυθμένα μιας μεγάλης δεξαμενής, συνδέεται ένας χονδρός οριζόντιος σωλήνας διατομής A_1 , ο οποίος καταλήγει σε δεύτερο διατομής $A_2 = \frac{1}{4} A_1$. Το άκρο του δεύτερου σωλήνα κλείνεται με μια τάπα. Τα σημεία A, B, Γ και Δ απέχουν κατακόρυφη απόσταση h από την ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής, τέτοια ώστε να ισχύει $p_{ατμ} = 5\rho gh$.

i) Σε ποιο από τα σημεία που έχουν σημειωθεί στο σχήμα, έχουμε μεγαλύτερη πίεση;

ii) Η πίεση στο σημείο Δ είναι:

$$\alpha) p_{\Delta} = 4\rho gh, \quad \beta) p_{\Delta} = 5\rho gh, \quad \gamma) p_{\Delta} = 6\rho gh$$

Σε μια στιγμή, βγάζουμε την τάπα, οπότε σε ελάχιστο χρόνο αποκαθίσταται μια μόνιμη και στρωτή ροή. Θεωρώντας πολύ μεγάλη την επιφάνεια της δεξαμενής, σε σύγκριση με τις διατομές των σωλήνων, ενώ το νερό ιδανικό ασυμπύεστο ρευστό, το οποίο ρέει χωρίς τριβές:

iii) Η πίεση στο σημείο B έχει τιμή:

$$\alpha) p_B = 0, \quad \beta) p_B = 4\rho gh, \quad \gamma) p_B = 5\rho gh, \quad \delta) p_B = 6\rho gh$$

iv) Για την πίεση στο σημείο Δ ισχύει:

$$\alpha) p_{\Delta} < 5\rho gh, \quad \beta) 5\rho gh < p_{\Delta} < 6\rho gh, \quad \gamma) p_{\Delta} > 6\rho gh.$$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση.

i) Με κλειστή την τάπα, έχουμε ένα υγρό σε υδροστατική ισορροπία, όπου τα σημεία A, B, Γ και Δ βρίσκονται στο ίδιο βάθος h , σε σχέση με την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, οπότε σε όλα τα σημεία η πίεση έχει την ίδια τιμή.

ii) Η πίεση στο σημείο Δ με βάση την αρχή του Pascal είναι ίση:

$$p_{\Delta} = p_{ατμ} + \rho gh = 5\rho gh + \rho gh = 6\rho gh$$

Σωστό το γ).

iii) Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων A και B παίρνουμε:

$$p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 \quad (1)$$

Αλλά από την εξίσωση της συνέχειας για τις διατομές του λεπτού σωλήνα, στις θέσεις A και B, έχου-

με:

$$A_B \cdot v_B = A_A \cdot v_A \rightarrow v_B = v_A$$

Έτσι η (1) γίνεται $p_B = p_A = p_{ατμ} = 5\rho gh$. Σωστό το γ).

iv) Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και Δ παίρνουμε:

$$p_\Delta + \frac{1}{2}\rho v_\Delta^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 \quad (2)$$

Αλλά από την εξίσωση της συνέχειας για τις διατομές στα σημεία Α και Δ παίρνουμε:

$$A_\Delta \cdot v_\Delta = A_A \cdot v_A \rightarrow 4A_I \cdot v_\Delta = A_I \cdot v_A \rightarrow 4v_\Delta = v_A$$

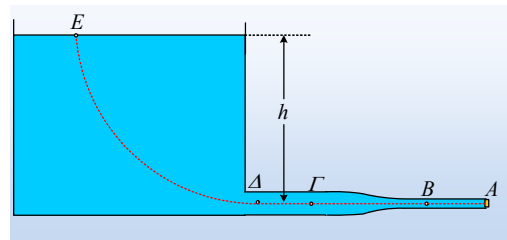
Και η (2) γίνεται:

$$p_\Delta + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{v_A}{4}\right)^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 \rightarrow$$

$$p_\Delta = p_A + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{2}\rho v_A^2 \quad (3)$$

Παίρνοντας τώρα την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και ενός σημείου Ε στην επιφάνεια της δεξαμενής, κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής παίρνουμε:

$$p_E + \frac{1}{2}\rho v_E^2 + \rho gh = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2$$



Αλλά η ταχύτητα στο σημείο Ε είναι σχεδόν μηδενική,

αφού το εμβαδόν της επιφάνειας είναι πολύ μεγαλύτερο του εμβαδού στο άκρο Α του σωλήνα, οπότε:

$$v_A = \sqrt{2gh} \quad (\text{θεώρημα Torricelli})$$

Και με αντικατάσταση στην (3):

$$p_\Delta = p_A + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{2}\rho v_A^2 = 5\rho gh + \frac{15}{32}\rho(\sqrt{2gh})^2 = 5\rho gh + \frac{15}{16}\rho gh < 6\rho gh$$

Σωστή η β) πρόταση $5\rho gh < p_\Delta < 6\rho gh$.

dmargaris@gmail.com