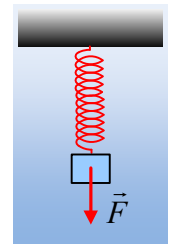


Ταλαντώσεις με άσκηση παροδικής δύναμης.

Ένα σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=40\text{N/m}^2$. Σε μια στιγμή, έστω $t=0$, δέχεται την επίδραση μιας σταθερής κατακόρυφης δύναμης μέτρου $F=20\text{N}$, μέχρι τη στιγμή $t_1=1,75\text{s}$, όπου η δύναμη παύει να ασκείται.



- i) Να αποδείξετε ότι στο παραπάνω χρονικό διάστημα $0-t_1$, το σώμα εκτελεί ΑΑΤ, υπολογίζοντας το πλάτος και την ενέργεια ταλάντωσης.
- ii) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή t_1 .
- iii) Να υπολογίσετε το έργο της ασκούμενης δύναμης F .
- iv) Να βρεθεί το πλάτος και η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος, μετά την κατάργηση της δύναμης F .

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$ και $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα, έχουμε πάρει, το φυσικό μήκος του ελατηρίου, την αρχική θέση ισορροπίας (1), τη θέση ισορροπίας (2), στη διάρκεια άσκησης της δύναμης F και μια τυχαία θέση, η οποία απέχει κατά y από την θέση ισορροπίας (2).

Στην αρχική θέση ισορροπίας (1), $\Sigma F=0 \rightarrow$

$$F_{ελ} - w = 0 \rightarrow k \cdot y_1 = mg \quad (1)$$

Στην νέα θέση ισορροπίας (2), $\Sigma F=0 \rightarrow$

$$F'_{ελ} = w + F \rightarrow k(y_1 + y_2) = mg + F \xrightarrow{-1} ky_2 = F \quad (2) \text{ ή}$$

$$y_2 = \frac{F}{k} = \frac{20\text{N}}{40\text{N/m}} = 0,5\text{m}$$

Για την τυχαία θέση έχουμε:

$$\Sigma F = F + w - F''_{ελ} = F + mg - k(y_1 + y_2 + y) = F + mg - k(y_1 + y_2) - ky \xrightarrow{(2)}$$

$$\Sigma F = -ky$$

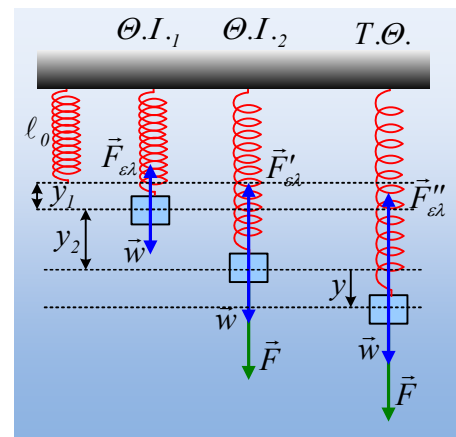
Συνεπώς στη διάρκεια άσκησης της δύναμης, το σώμα εκτελεί ΑΑΤ, γύρω από τη θέση ισορροπίας (2), η οποία είναι χαμηλότερα κατά $0,5\text{m}$, από την αρχική θέση ισορροπίας (1), με σταθερά επαναφοράς $D=k$.

Αλλά το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του αυτή, από την αρχική θέση ισορροπίας (1) με μηδενική ταχύτητα, συνεπώς η θέση αυτή είναι ακραία θέση της ταλάντωσής του και το πλάτος ταλάντωσης θα είναι $A_1=y_1=0,5\text{m}$. Συνεπώς και για την ενέργεια ταλάντωσης θα έχουμε:

$$E_{1τ} = \frac{1}{2}DA_1^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}40 \cdot 0,5^2 \text{ J} = 5\text{J}$$

- ii) Η περίοδος ταλάντωσης είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{40}}\text{s} = 1\text{s}$$



Συνεπώς $t_1 = T + \frac{3}{4}T$ και τη στιγμή που καταργείται η δύναμη F, το σώμα έχει εκτελέσει μια ταλάντωση και τα $\frac{3}{4}$ της ταλάντωσης και περνάει από την θέση ισορροπίας του (2) κινούμενο προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου $v = \omega \cdot A_1 = 2\pi \cdot 0,5 \text{ m/s} = 3,14 \text{ m/s}$.

iii) Για την ενέργεια που προσφέρθηκε στο σώμα, μέσω του έργου της ασκούμενης δύναμης έχουμε:

$$W_F = F \cdot \Delta x = 20 \text{ N} \cdot 0,5 \text{ m} = 10 \text{ J}$$

Όπου Δx η μετατόπιση του σώματος ίση με το πλάτος A_1 .

iv) Τη στιγμή t_1 σταματά η άσκηση της δύναμης F, ενώ το σώμα απέχει κατά 0,5m από την αρχική θέση ισορροπίας του έχοντας ταχύτητα $v = 3,14 \text{ m/s}$. Αν πάρουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση:

$$\Sigma F = w - F_{ελ} = mg - k(y_1 + y) = -ky$$

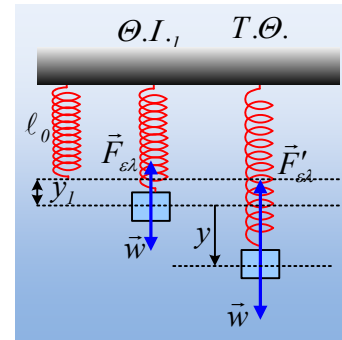
Συνεπώς το σώμα συνεχίζει να κινείται εκτελώντας μια νέα ΑΑΤ, γύρω από τη θέση ισορροπίας (1). Από την διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση αυτή, παίρνουμε:

$$E_{2\tau} = K_{t1} + U_{t1} \rightarrow$$

$$E_{2\tau} = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k y_1^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot \pi^2 \text{ J} + \frac{1}{2} 40 \cdot 0,5^2 \text{ J} = 10 \text{ J}$$

Ενώ

$$E_{2\tau} = \frac{1}{2} k A_2^2 \rightarrow A_2 = \sqrt{\frac{2E_{2\tau}}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{40}} \text{ m} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m} \approx 0,71 \text{ m}$$



Σχόλιο:

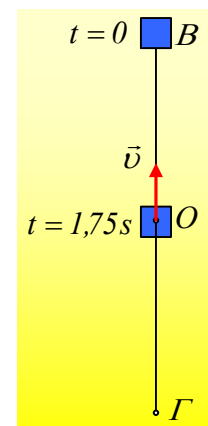
1) Το σώμα ξεκινά την πρώτη ταλάντωσή του από την θέση ισορροπίας (1), σημείο B, τη στιγμή $t=0$, φτάνει στην άλλη ακραία θέση Γ, τη στιγμή $t=0,5\text{s}$, επιστρέφει στο B τη στιγμή 1s , ξαναπηγαίνει στο Γ τη στιγμή $1,5\text{s}$ και τη στιγμή πια $1,75\text{s}$ φτάνει στην θέση ισορροπίας (2) O, κινούμενο προς τα πάνω. Έτσι για το έργο της ασκούμενης δύναμης F, έχουμε:

$$W_F = W_{BF} + W_{GB} + W_{BF} + W_{FO} \rightarrow$$

$$W_F = F \cdot 2A_1 - F \cdot 2A_1 + F \cdot 2A_1 - F \cdot A_1 = F \cdot A_1$$

2) Υπολογίσαμε ότι προσφέρθηκε στο σώμα ενέργεια, ίση με το έργο της δύναμης $W=10\text{J}$. Η ενέργεια της πρώτης ταλάντωσης όμως, είναι 5J και όχι 10J , αφού το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από την ακραία του θέση. Η πρόταση: «Η Ενέργεια ταλάντωσης, είναι ίση με την ενέργεια που δίνουμε στο σώμα, ώστε να ταλαντωθεί», υπονοεί ότι αρχικά το σώμα ηρεμεί στην θέση ισορροπίας του.

Έτσι για την δεύτερη ταλάντωση, η ενέργεια ταλάντωσης είναι πράγματι 10J , ίση δηλαδή με την ενέργεια που προσφέρθηκε στο σώμα, μέσω του έργου της δύναμης που το έθεσε «τελικά» στην $2^{\text{η}}$ ταλά-



ντώση.

dmargaris@gmail.com