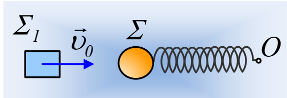
Μετά την ελαστική κρούση.



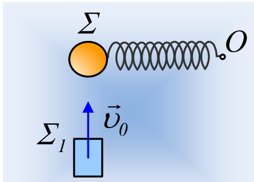
Σχήμα 1. κάτοψη

Ένα σώμα Σ μάζας 2kg, ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου με μήκος ℓ=2m και σταθεράς k=50N/m, το άλλο άκρο του οποίου έχει προσδεθεί σε σταθερό σημείο Ο. Ένα δεύτερο σώμα Σ_1, μάζας 1kg κινείται με ταχύτητα υ_0=7,5m/s στην κατεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, όπως στο σχήμα 1. και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το Σ.

i) Να βρεθούν οι ταχύτητες των δύο σωμάτων, αμέσως μετά την κρούση.

ii) Ποιο το μέγιστο και ποιο το ελάχιστο μήκος του ελατηρίου;

iii) Σε μια στιγμή t_1 η ταχύτητα του σώματος Σ παίρνει τιμή υ_1=4m/s για πρώτη φορά. Ποιο το μήκος και ποιος ο ρυθμός μεταβολής του μήκους του ελατηρίου τη στιγμή αυτή;



Σχήμα 2. κάτοψη

Σε μια επανάληψη της κρούσης, το σώμα Σ_1 έχει ίδιου μέτρου ταχύτητα υ_0, αλλά τώρα κινείται κάθετα στον άξονα του ελατηρίου (σχήμα 2), ενώ η κρούση μεταξύ των σωμάτων είναι ξανά κεντρική και ελαστική.

iv) Ο Αντώνης, υποστηρίζει ότι τώρα το σώμα Σ, μετά την κρούση θα εκτελέσει κυκλική κίνηση γύρω από το άκρο Ο του ελατηρίου. Να εξετάσετε αν αυτό, είναι μια σωστή θέση.

v) Κάποια επόμενη στιγμή t_2 η ταχύτητα του σώματος Σ, έχει μέτρο υ_1=4m/s, ενώ το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί. Πόσο απέχει από το Ο το σώμα Σ, τη στιγμή αυτή και πόση επιτάχυνση έχει;

vi) Ένας δεύτερος μαθητής, ο Βασίλης, υποστηρίζει ότι τη στιγμή t_2, η επιτάχυνση του σώματος Σ είναι κεντρομόλος. Είναι σωστός ή λάθος ο παραπάνω ισχυρισμός;

vii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου τη στιγμή t_2;

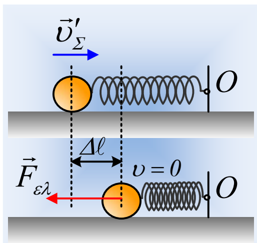
Απάντηση:

i) Οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση, δίνονται από τις σχέσεις:

$$\upsilon'_\Sigma = \frac{2m_{\Sigma 1}}{m_\Sigma + m_{\Sigma 1}}\upsilon_0 \quad \text{και} \quad \upsilon'_{\Sigma 1} = \frac{m_{\Sigma 1} - m_\Sigma}{m_\Sigma + m_{\Sigma 1}}\upsilon_0$$

Και με αντικατάσταση:

$$\upsilon'_\Sigma = \frac{2\cdot 1}{2+1}7{,}5m/s = 5m/s \quad \text{και} \quad \upsilon'_{\Sigma 1} = \frac{1-2}{2+1}7{,}5m/s = -2{,}5m/s$$



ii) Αμέσως μετά την κρούση, το σώμα Σ συμπιέζει το ελατήριο, δεχόμενο δύναμη από αυτό, αντίθετης φοράς από την ταχύτητά του. Συνεπώς το σώμα θα επιβραδύνεται μέχρι τη θέση που θα μηδενιστεί (στιγμιαία) η ταχύτητά του. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σύστημα σώμα Σ-ελατήριο, ανάμεσα στις θέσεις, αμέσως μετά την κρούση και μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου, έχουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_{\Sigma}\upsilon_{\Sigma}'^{2}+\frac{1}{2}k(\Delta\ell_{0})^{2}=0+\frac{1}{2}k(\Delta\ell_{max})^{2}$$

Αλλά αφού το σώμα Σ αρχικά ηρεμεί, το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του $\ell=\ell_0=2m$ και $\Delta\ell_0=0$, οπότε παίρνουμε:

$$\Delta\ell_{max}=\upsilon_{\Sigma}'\sqrt{\frac{m_{\Sigma}}{k}}=5\sqrt{\frac{2}{50}}m=1m$$

Αλλά τότε το ελάχιστο μήκος του ελατηρίου θα είναι $\ell_{min}=\ell_0-\Delta\ell_{max}=2m-1m=1m$

Στη συνέχεια η δύναμη του ελατηρίου θα επιταχύνει προς τα αριστερά το σώμα, μέχρι την αρχική του θέση, αφού στη συνέχεια το ελατήριο θα επιμηκυνθεί, επιβραδύνοντας το σώμα και μηδενίζοντας ξανά την ταχύτητά του σε κάποια θέση, οπότε το ελατήριο θα έχει και το μέγιστο μήκος του. Με εφαρμογή ξανά της αρχής διατήρησης της ενέργειας, όπως παραπάνω, βρίσκουμε ότι η μέγιστη επιμήκυνση θα είναι επίσης 1m και το μέγιστο μήκος του ελατηρίου $\ell_{max}=\ell_0+\Delta\ell_{max}=2m+1m=3m$.

iii) Εφαρμόζουμε ξανά την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σύστημα σώμα Σ-ελατήριο, ανάμεσα στις θέσεις, αμέσως μετά την κρούση και της θέσης όπου το σώμα έχει ταχύτητα υ_1 και παίρνουμε:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_1+U_1\rightarrow$$

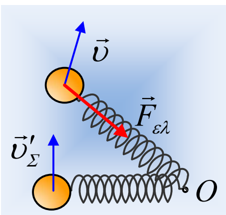
$$\frac{1}{2}m_{\Sigma}\upsilon_{\Sigma}'^{2}+0=\frac{1}{2}m_{\Sigma}\upsilon_{1}^{2}+\frac{1}{2}k(\Delta\ell_{1})^{2}$$

$$\Delta\ell_1=\sqrt{\frac{m_{\Sigma}}{k}(\upsilon_{\Sigma}'^{2}-\upsilon_1^2)}=\sqrt{\frac{2}{50}(5^2-4^2)}m=0{,}6m$$

Οπότε το μήκος του ελατηρίου είναι $\ell_1=\ell_0-\Delta\ell_1=2m-0{,}6m=1{,}4m$.

Εξάλλου η ταχύτητα του σώματος, ίση με το ρυθμό μεταβολής της θέσης $\upsilon=\frac{dx}{dt}$, μετράει στην ουσία το ρυθμό μεταβολής του μήκους του ελατηρίου στην παραπάνω θέση, δηλαδή $\frac{d\ell}{dt}=-4m/s$ ή αν προτιμάτε το μήκος του ελατηρίου μειώνεται με ρυθμό $\frac{d\ell}{dt}=4m/s$.

iv) Η κρούση είναι ξανά κεντρική και ελαστική, οπότε το σώμα Σ θα αποκτήσει και πάλι ταχύτητα μέτρου 5m/s, αλλά με διεύθυνση κάθετη στον άξονα του ελατηρίου, όπως στο διπλανό σχήμα. Η κίνηση όμως του σώματος δεν μπορεί να είναι κυκλική κέντρου Ο και ακτίνας $R=\ell_0$ αφού έτσι δεν υπάρχει η απαραίτητη κεντρομόλος δύναμη, που θα συγκρατήσει σε κυκλική τροχιά το σώμα. Στην πραγματικότητα το σώμα αρχικά θα κινηθεί ευθύγραμμα, αλλά πολύ σύντομα λόγω επιμήκυνσης του ελατηρίου θα δεχτεί δύναμη, η οποία όμως θα είναι μεταβλητή, αλλάζοντας τόσο τη διεύθυνση όσο και το μέτρο της ταχύτητας.

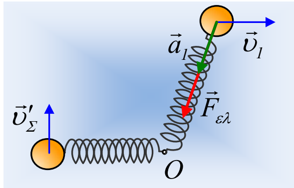


v) Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σύστημα σώμα Σ-ελατήριο, ανάμεσα στις θέσεις, αμέσως μετά την κρούση και της θέσης όπου το σώμα έχει ταχύτητα υ_1, έχουμε:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_\Sigma \upsilon_\Sigma'^2 + 0 = \frac{1}{2} m_\Sigma \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} k(\Delta\ell)^2$$

$$\Delta\ell = \sqrt{\frac{m_\Sigma}{k}\left(\upsilon_\Sigma'^2 - \upsilon_1^2\right)} = \sqrt{\frac{2}{50}\left(5^2 - 4^2\right)} m = 0{,}6m$$



Έτσι το μήκος του ελατηρίου, άρα και η απόσταση του Σ από το Ο είναι:

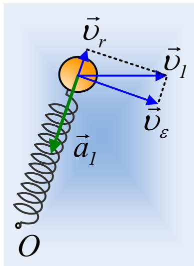
$$\ell_1 = \ell_0 + \Delta\ell = 2m + 0{,}6m = 2{,}6m\,.$$

Στην παραπάνω θέση η μόνη δύναμη που επιταχύνει το σώμα είναι η δύναμη του ελατηρίου, αφού στην κατακόρυφη διεύθυνση το σώμα ισορροπεί και $\Sigma F_y=0$ ή ($\vec{w} + \vec{N} = 0$). Οπότε από το 2^o νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow a_1 = \frac{F_{ελ}}{m_\Sigma} = \frac{k\Delta\ell}{m_\Sigma} = \frac{50 \cdot 0{,}6}{2} m/s^2 = 15m/s^2$$

Με διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου και φορά προς το σημείο πρόσδεσης του ελατηρίου Ο.

vi) Για να είναι σωστή η άποψη του Βασίλη, πρέπει η επιτάχυνση του σώματος να είναι κάθετη στην ταχύτητα. Όμως στη διάρκεια της κίνησης του σώματος Σ, η μόνη δύναμη που δέχεται (σημειώνεται ότι $\Sigma F_y=0$), η δύναμη του ελατηρίου, κατευθύνεται προς ένα σταθερό σημείο Ο. Σε ένα σταθερό κέντρο! (Μια τέτοια δύναμη λέγεται **κεντρική**). Αλλά τότε η ροπή της δύναμης αυτής ως προς το Ο είναι μηδενική (μηδενική είναι και η συνολική ροπή ως προς το Ο του βάρους και της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου), οπότε η στροφορμή του σώματος Σ ως προς το Ο παραμένει σταθερή.



Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι στη θέση αυτή η ταχύτητα υ_1 έχει την κατεύθυνση του σχήματος και αναλύεται σε δυο συνιστώσες την υ_r στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου και $\upsilon_ε$ σε κάθετη διεύθυνση. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της στροφορμής παίρνουμε:

$$\vec{L}_{αρ} = \vec{L}_1$$

Και θεωρώντας θετική τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού:

$$m_\Sigma \upsilon_\Sigma' \ell_0 = m_\Sigma \upsilon_ε \ell_1 \rightarrow \upsilon_ε = \frac{\upsilon_\Sigma' \ell_0}{\ell_1} = \frac{5 \cdot 2}{2{,}6} m = 3{,}85m/s$$

Η άποψη λοιπόν του Βασίλη, είναι λάθος, αφού η επιτάχυνση δεν είναι κάθετη στην ταχύτητα υ_1, η οποία εμφανίζει και συνιστώσα υ_r μέτρου:

$$\upsilon_r = \sqrt{\upsilon_1^2 - \upsilon_ε^2} = \sqrt{4^2 - 3{,}85^2} m/s \approx 1{,}1m/s$$

vii) Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μπορεί να γραφτεί:

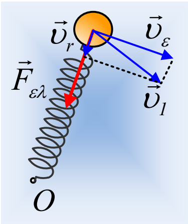
$$K+U=σταθ. \rightarrow \frac{dK}{dt}+\frac{dU_{ελ}}{dt}=0 \rightarrow \frac{dU_{ελ}}{dt}=-\frac{dK}{dt}\rightarrow$$

$$\frac{dU_{ελ}}{dt}=-|F_{ελ}||\upsilon_r|συνθ$$

α) Αν η εικόνα είναι αυτή του παραπάνω σχήματος, τότε:

$$\frac{dU_{ελ}}{dt}=-|F_{ελ}||\upsilon_r|συν180^o=|F_{ελ}||\upsilon_r|=kΔ\ell\cdot|\upsilon_r|=50\cdot 0,6\cdot 1,1J/s=33J/s$$

β) Θα μπορούσε όμως να έχουμε και την εικόνα του διπλανού σχήματος, οπότε:



$$\frac{dU_{ελ}}{dt}=-|F_{ελ}||\upsilon_r|συν0^o=-|F_{ελ}||\upsilon_r|=-kΔ\ell\cdot|\upsilon_r|$$

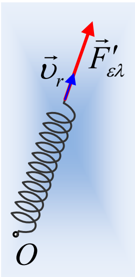
$$\frac{dU_{ελ}}{dt}=-kΔ\ell\cdot|\upsilon_r|=-50\cdot 0,6\cdot 1,1J/s=-33J/s$$

Στην α) περίπτωση το μήκος του ελατηρίου αυξάνεται οπότε και η δυναμική του ενέργεια αυξάνεται, ενώ στην β) το μήκος του ελατηρίου μειώνεται, η επιμήκυνσή του $Δ\ell$ μειώνεται επίσης, οπότε μειώνεται και η δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου.

Σχόλια:

1) Μετά την πρώτη κρούση, η κίνηση του σώματος Σ είναι μια ΑΑΤ. Παραπάνω προτιμήθηκε η λύση να βασιστεί στην διατήρηση της ενέργειας, χωρίς να χρησιμοποιηθεί η θεωρία της ΑΑΤ. Αν η άσκηση δοθεί σε μαθητές όταν γνωρίζουν ταλαντώσεις, τότε θα μπορούσε να απαντηθούν τα ερωτήματα ii) και iii) με διαφορετικό τρόπο.

2) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, θα μπορούσε να υπολογιστεί και ως η ισχύς της αντίδρασης της $F_{ελ}$, της $F'_{ελ}$, την οποία ασκεί το σώμα Σ στο ελατήριο:



$$\frac{dU_{ελ}}{dt}=|F'_{ελ}||\upsilon_r|συνα$$

3) Το ερώτημα με τη διατήρηση της στροφορμής, ας μην δοθεί σε μαθητές, αφού «ξεφεύγει» από την ύλη που πρέπει να γνωρίζουν.

dmargaris@gmail.com