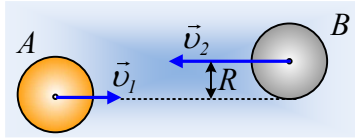


Μια έκκεντρη κρούση δύο σφαιρών.

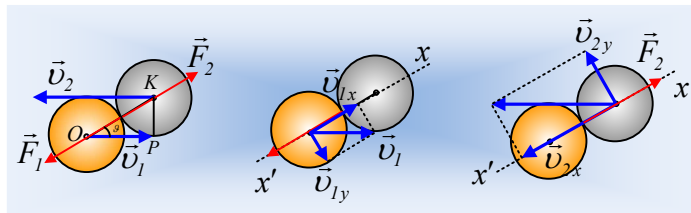


Δύο λείες, ομογενείς σφαίρες με μάζες $m_1=0,1\text{kg}$, $m_2=0,2\text{kg}$ και την ίδια ακτίνα R , κινούνται χωρίς να περιστρέφονται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με παράλληλες ταχύτητες μέτρων $v_1=0,6\text{m/s}$ και $v_2=0,9\text{m/s}$, όπως στο σχήμα, όπου η απόσταση των φορέων των ταχυτήτων είναι ίση με την ακτίνα των σφαιρών. Οι σφαίρες συγκρούονται ελαστικά.

- i) Να βρεθούν οι ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κρούση.
- ii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής της Α σφαίρας, που οφείλεται στην κρούση.
- iii) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης F_1 που ασκήθηκε στη διάρκεια της κρούσης στην Α σφαίρα.

Απάντηση:

- i) Στη διάρκεια της κρούσης, ασκούνται στις σφαίρες οι δυνάμεις F_1 και F_2 του πρώτου από τα παρακάτω σχήματα, όπου οι φορείς τους βρίσκονται πάνω στη διάκεντρο των δύο σφαιρών.



Στα δύο επόμενα σχήματα, έχουν αναλυθεί οι ταχύτητες των σφαιρών, πριν την κρούση σε δύο κάθετες διευθύνσεις. Στη διεύθυνση $x'x$, πάνω στη διάκεντρο των σφαιρών στη διάρκεια της κρούσης και $y'y$, σε κάθετη διεύθυνση. Η κρούση (και η εμφάνιση των δυνάμεων) οφείλεται στις συνιστώσες v_{1x} και v_{2x} των δύο ταχυτήτων, ενώ οι συνιστώσες v_{1y} και v_{2y} δεν πρόκειται να μεταβληθούν, δηλαδή $v'_{1y} = v_{1y}$ και $v'_{2y} = v_{2y}$.

Εξάλλου για τη διεύθυνση x από το τρίγωνο OPK , έχουμε $\eta\mu\theta = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$ ή $\theta=30^\circ$.

Από την αρχή διατήρησης της ορμής παίρνουμε:

$$\vec{P}_\pi = \vec{P}_\mu \rightarrow \begin{cases} P_{\pi,x} = P_{\mu,x} \rightarrow m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \quad (1) \\ P_{\pi,y} = P_{\mu,y} \rightarrow m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y} \end{cases}$$

Ενώ αφού η κρούση είναι ελαστική η κινητική ενέργεια πριν την κρούση, είναι ίση με την κινητική ενέργεια μετά την κρούση:

$$K_{\pi\text{ριν}} = K_{\text{μετά}} \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1x}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{1y}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2x}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2y}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1x}'^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{1y}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2x}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2y}'^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1x}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2x}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1x}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2x}'^2 \quad (2)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) περιγράφει μια «κεντρική» ελαστική κρούση των σφαιρών στη διεύθυνση x'x, οπότε ισχύουν οι γνωστές εξισώσεις για την κρούση αυτή.

Πριν την κρούση έχουμε ταχύτητες:

$$v_{1x} = v_1 \sigma \nu \theta = 0,6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} m/s = 0,3\sqrt{3} m/s \quad \text{και} \quad v_{1y} = v_1 \eta \mu \theta = 0,6 \cdot \frac{1}{2} m/s = 0,3 m/s$$

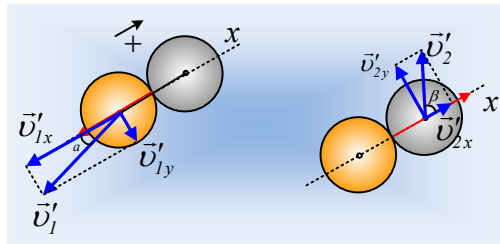
$$v_{2x} = v_2 \sigma \nu \theta = 0,9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} m/s = 0,45\sqrt{3} m/s \quad \text{και} \quad v_{2y} = v_2 \eta \mu \theta = 0,9 \cdot \frac{1}{2} m/s = 0,45 m/s$$

Οπότε οι ταχύτητες στη διεύθυνση x'x μετά την κρούση είναι:

$$v_{1x}' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1x} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2x} = \frac{0,1 - 0,2}{0,1 + 0,2} 0,3\sqrt{3} m/s + \frac{2 \cdot 0,2}{0,1 + 0,2} (-0,45\sqrt{3}) m/s = -0,7\sqrt{3} m/s$$

$$v_{2x}' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1x} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2x} = \frac{2 \cdot 0,1}{0,1 + 0,2} 0,3\sqrt{3} m/s + \frac{0,2 - 0,1}{0,1 + 0,2} (-0,45\sqrt{3}) m/s = 0,05\sqrt{3} m/s$$

Αλλά τότε οι σφαίρες μετά την κρούση, έχουν τις ταχύτητες που σημειώνονται στο παρακάτω σχήμα, όπου:



$$v_1' = \sqrt{v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2} = \sqrt{(0,7\sqrt{3})^2 + (0,3)^2} m/s = \sqrt{1,56} m/s \approx 1,25 m/s \quad \text{και} \quad \epsilon \rho \alpha = \frac{v_{1y}'}{v_{1x}'} = \frac{0,3}{0,7\sqrt{3}} \approx 0,24$$

$$v_2' = \sqrt{v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2} = \sqrt{(0,05\sqrt{3})^2 + (0,45)^2} m/s \approx 0,46 m/s \quad \text{και} \quad \epsilon \rho \beta = \frac{v_{2y}'}{v_{2x}'} = \frac{0,45}{0,05\sqrt{3}} \approx 5,2$$

ii) Για την μεταβολή της ορμής της Α σφαίρας έχουμε:

$$\Delta \vec{P}_A = \vec{P}'_A - \vec{P}_A \rightarrow \begin{cases} \Delta P_x = P'_x - P_x = m_1 v_{1x}' - m_1 v_{1x} \rightarrow \\ \Delta P_y = P'_y - P_y = 0 \end{cases}$$

$$\Delta P_A = \Delta P_x = 0,1(-0,7\sqrt{3} - 0,3\sqrt{3}) kgm/s = -0,1\sqrt{3} kgm/s$$

Με φορά ίδια με την v_{1x}' .

iii) Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την σφαίρα Α, παίρνουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \rightarrow$$

$$W_{F_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \rightarrow$$

$$W_{F_1} = \frac{1}{2} 0,1 (\sqrt{1,56})^2 J - \frac{1}{2} 0,1 \cdot 0,6^2 J = 0,06 J$$

dmargaris@gmail.com