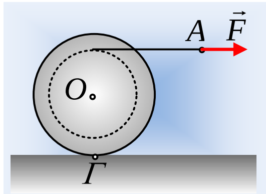
Ένας κυλινδρικός φλοιός επιταχύνεται.



Ένας λεπτός κυλινδρικός φλοιός, μάζας M=20kg και ακτίνας R=50cm, φέρει σχισμή βάθους y=10cm, εντός της οποίας έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα και ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή ασκούμε μια οριζόντια δύναμη F στο άκρο Α του νήματος, με αποτέλεσμα το σημείο Α να αποκτά μια σταθερή επιτάχυνση $α_A$=0,9m/s^2, ενώ ο φλοιός κυλίεται.

i) Να βρεθεί η επιτάχυνση του άξονα του κυλινδρικού φλοιού.

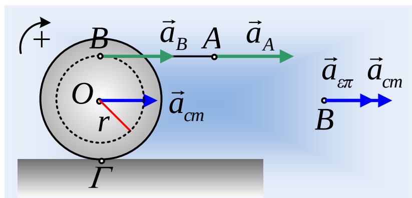
ii) Να υπολογιστεί η μετατόπιση του άξονα Ο του φλοιού, τη στιγμή t_1 που το άκρο Α του νήματος έχει μετατοπιστεί κατά x_A=4,5m; Πόσο νήμα έχει ξετυλιχθεί μέχρι τη στιγμή αυτή;

iii) Να βρεθεί το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F.

iv) Τη στιγμή t_2=4s, ο κυλινδρικός φλοιός, περνά σε ένα δεύτερο λείο οριζόντιο επίπεδο, όπου συνεχίζει την κίνησή του, ενώ συνεχίζει να ασκείται η ίδια δύναμη F στο άκρο Α του νήματος. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σημείου επαφής του φλοιού με το επίπεδο, σημείο Γ, τη χρονική στιγμή t_3=7s.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου I= ½ MR^2 και g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Η επιτάχυνση του άκρου Α του νήματος, είναι και επιτάχυνση κάθε σημείου του οριζόντιου τμήματος του νήματος, συνεπώς και επιτάχυνση του σημείου Β΄, όπου το νήμα εφάπτεται του φλοιού. (Το αντίστοιχο σημείο Β του φλοιού θα έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση, η οποία όμως δεν μας απασχολεί τη στιγμή αυτή, αφού κατευθύνεται προς το κέντρο Ο του φλοιού). Θεωρώντας την κίνηση του φλοιού σύνθετη, μια μεταφορική με επιτάχυνση του κέντρου μάζας Ο $\vec{a}_{cm}$ και μια στροφική με γωνιακή επιτάχυνση $α_{γων}$, τότε το σημείο Β του φλοιού, έχει οριζόντια επιτάχυνση:

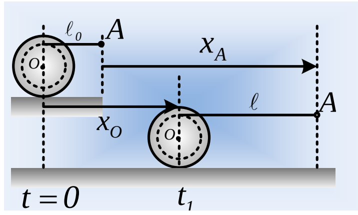
$$α_B=α_A=α_{cm}+α_{επ}=α_{cm}+α_{γων}\cdot r \quad (1)$$

όπου $r=R\text{-}y=0{,}5m\text{-}0{,}1m=0{,}4m$.

Αφού ο φλοιός κυλίεται ισχύει ότι $α_{cm}=α_{γων}\cdot R$, οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$$a_A=a_{cm}+\frac{a_{cm}}{R}r \rightarrow a_{cm}=a_A\frac{R}{R+r}=0{,}9\frac{0{,}5}{0{,}5+0{,}4}m/s^2=0{,}5m/s^2.$$

ii) Τόσο το σημείο Α, όσο και ο άξονας του φλοιού κινούνται με σταθερή επιτάχυνση, εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε:



$$x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 \quad \text{και} \quad x_O = \frac{1}{2}a_{cm} t^2$$

Με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

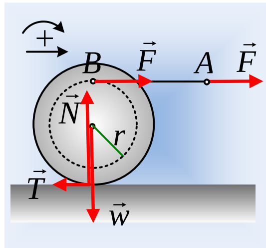
$$\frac{x_O}{x_A} = \frac{a_{cm}}{a_A} \rightarrow x_O = x_A \frac{a_{cm}}{a_A} = 4{,}5\frac{0{,}5}{0{,}9}m = 2{,}5m\,.$$

Με βάση το παραπάνω σχήμα, όπου φαίνεται η θέση του φλοιού τις στιγμές t=0 και t_1, αν ℓ_0 το αρχικό μήκος του νήματος και ℓ το τελικό μήκος του ισχύει:

$$\ell_0 + x_A = x_O + \ell \rightarrow \ell - \ell_0 = x_A - x_O = 4{,}5m - 2{,}5m = 2m$$

Έχει συνεπώς ξετυλιχθεί νήμα μήκους $\Delta\ell = 2m$.

iii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κυλινδρικό φλοιό, όπου η ασκούμενη δύναμη F, μεταφέρεται στον κύλινδρο σε απόσταση r από τον άξονά του, όπου y=R-r, ενώ η ασκούμενη τριβή σχεδιάστηκε προς τα αριστερά.



Θεωρούμε την κύλιση του κυλινδρικού φλοιού ως σύνθετη, μια μεταφορική και μια περιστροφική γύρω από τον άξονα περιστροφής στο O. Με θετική την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, καθώς και τις δεξιόστροφες ροπές θετικές, εφαρμόζουμε το 2ου νόμο του Νεύτωνα για κάθε κίνηση χωριστά παίρνοντας:

Μεταφορική: $\Sigma\vec{F} = M\vec{a}_{cm} \rightarrow F - T = Ma_{cm}$ (1)

Στροφική: $\Sigma\tau_o = I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot r + T\cdot R = ½\, MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Αλλά από την κύλιση έχουμε ακόμη $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ (3)

Από τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε:

$$F\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \frac{3}{2}Ma_{cm} \rightarrow F = \frac{3R}{2(R+r)}Ma_{cm}$$

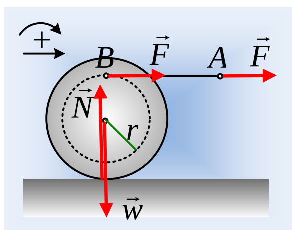
$$F = \frac{3R}{2(R+r)}Ma_{cm} = \frac{3\cdot 0{,}5}{2(0{,}5+0{,}4)}20\cdot 0{,}5N = \frac{25}{3}N$$

iv) Τη στιγμή t_2=4s που ο κυλινδρικός φλοιός περνά στο λείο οριζόντιο επίπεδο έχει:

ταχύτητα κέντρου μάζας: $\upsilon_{2cm} = \alpha_{cm}\cdot t_2 = 0{,}5\cdot 4m/s = 2m/s$ και

γωνιακή ταχύτητα: $\omega_2 = \frac{\upsilon_{cm}}{R} = \frac{2}{0{,}5}rad/s = 4rad/s.$

Για τη συνέχεια εφαρμόζουμε ξανά το 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνοντας:



Μεταφορική κίνηση: : $\Sigma\vec{F} = M\vec{a}_{cm/1} \rightarrow F = Ma_{cm/1} \rightarrow$

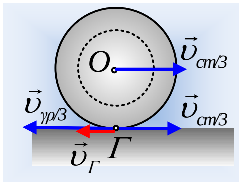
$$a_{cm/1} = \frac{F}{M} = \frac{25}{3\cdot 20}m/s^2 = \frac{5}{12}m/s^2.$$

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau_o = I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot r = ½\, MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu/1} \rightarrow$

$$a_{\gamma\omega\nu/1}=\frac{2Fr}{MR^2}=\frac{2\cdot{}^{25}\!/_{3}\cdot 0{,}4}{20\cdot 0{,}5^2}\,rad/s^2={}^{4}\!/_{3}\,rad/s^2.$$

Έτσι τη στιγμή t_3 η ταχύτητα του κέντρου Ο έχει μέτρο:

$$\upsilon_{cm/3}=\upsilon_2+\alpha_{cm/1}(t_3-t_2)=2m/s+\frac{5}{12}(7-4)m/s=3{,}25m/s$$



Ας έρθουμε τώρα στο σημείο επαφής του κυλίνδρου με το επίπεδο, στο σημείο Γ. Αυτό θα έχει μια ταχύτητα $\upsilon_{cm/3}$ με φορά προς τα δεξιά, εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και μια $\upsilon_{\gamma\rho/3}$ εξαιτίας της κυκλικής κίνησης γύρω από το Ο, με φορά προς τα αριστερά και μέτρο:

$$\upsilon_{\gamma\rho/3}=\omega_3\cdot R=\left(\omega_2+a_{\gamma\omega\nu/1}(t_3-t_2)\right)R=\omega_2 R+a_{\gamma\omega\nu/1}R(t_3-t_2)\rightarrow$$

$$\upsilon_{\gamma\rho/3}=4\cdot 0{,}5m/s+\frac{4}{3}\cdot 0{,}5\cdot 3m/s=4m/s.$$

Συνεπώς η ταχύτητα του σημείου Γ, έχει φορά προς τα αριστερά και μέτρο:

$$\upsilon_{\Gamma}=\upsilon_{\gamma\rho/3}-\upsilon_3=(4-3{,}25)m/s=0{,}75m/s$$

Σχόλια:

1) Η κίνηση στο λείο επίπεδο απεδείχθη ότι δεν είναι κύλιση, αλλά το στερεό μας σπινάρει. Αυτό σημαίνει ότι η δράση μόνο της δύναμης F μέσω του νήματος, έχει σαν αποτέλεσμα να προκαλεί τέτοια γωνιακή επιτάχυνση, ώστε η γραμμική ταχύτητα του Γ, να είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του κέντρου μάζας. Αν θα θέλαμε να μην σπινάρει αλλά να κυλίεται, θα πρέπει να ασκείτο πάνω του μια αντίθετης φοράς ροπή, από τη ροπή της F, ώστε να μειωθεί η γωνιακή επιτάχυνση.

2) Αλλά τότε πώς πετύχαμε κύλιση στο μη λείο οριζόντιο επίπεδο; Προφανώς ασκήθηκε και η τριβή η οποία «περιόρισε» την γωνιακή επιτάχυνση, έχοντας αντίθετη ροπή από την ροπή της F! Αλλά τότε στο σχήμα του iii) ερωτήματος έχουμε σχεδιάσει λάθος την τριβή!!!

3) Παρόλα αυτά, το αποτέλεσμα στο ερώτημα είναι σωστό. Πράγματι αν παίρναμε την τριβή προς τα δεξιά, θα είχαμε:

Μεταφορική: $\Sigma\vec{F}=M\vec{a}_{cm}\rightarrow F+T=Ma_{cm}$ (1)

Στροφική: $\Sigma\tau_o=I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\rightarrow F\cdot r-T\cdot R=½\,MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Αλλά από την κύλιση έχουμε ακόμη $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ (3) →

$$F\left(1+\frac{r}{R}\right)=\frac{3}{2}Ma_{cm}\rightarrow F=\frac{3R}{2(R+r)}Ma_{cm}\ldots.$$

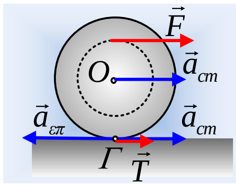
Πράγμα που σημαίνει ότι δεν επηρεάζει τη λύση μας ο αρχικός σχεδιασμός της τριβής. Η σωστή κατεύθυνσή της θα προκύψει, αν υπολογίσουμε την τιμή της από την εξίσωση (1).

Έτσι με τον αρχικό σχεδιασμό, αν λύσουμε ως προς Τ, βρίσκουμε:

$$T=F\text{-}M\alpha_{cm}=\frac{25}{3}N-20\cdot 0{,}5N=-\frac{5}{3}N$$

Πράγμα που υποδεικνύει ότι έχει αντίθετη φορά, από αυτήν που είχαμε σχεδιάσει.

4) Θα μπορούσαμε να προβλέψουμε εξαρχής την κατεύθυνση της τριβής, με την επίδραση της δύναμης F (και μάλιστα ανεξάρτητα της τιμής της δύναμης…). Έτσι με τη δράση μόνο της δύναμης (χωρίς την άσκηση τριβής) θα είχαμε:



$$F=M\cdot\alpha_{cm}\ \ και\ F\cdot r=½\,MR^2\cdot\alpha_{γων}\rightarrow$$

$$\alpha_{επ/Γ}=\alpha_{γων}R=\frac{F}{M}\frac{2r}{R}>\frac{F}{M}=a_{cm}$$

Βλέπουμε ότι το σημείο Γ επαφής του φλοιού με το έδαφος, με την επίδραση μόνο της δύναμης F, τείνει να επιταχυνθεί προς τα αριστερά, συνεπώς θα εμφανιστεί δύναμη τριβής με φορά προς τα δεξιά.

Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης